Éléments de mécanique des fluides

Application aux milieux poreux

par **Jean-Claude CHARPENTIER**

Professeur et directeur de l'École supérieure de chimie, physique, électronique de Lyon
Directeur de recherche au CNRS
Ancien directeur scientifique du département Science pour l'Ingénieur du CNRS
Ancien directeur de l'École nationale supérieure des industries chimiques de Nancy

Parmi les nombreux problèmes de génie des procédés que rencontrent l'ingénieur et le pharmacien travaillant dans les industries chimiques, pétrolières, pharmaceutiques, cosmétiques et agroalimentaires, ***l'écoulement d'un ou de plusieurs fluides à travers un milieu poreux fixe ou mobile*** *tient une place prépondérante. Il suffit de citer les principaux procédés unitaires du génie des procédés (séchage, fluidisation, sédimentation, cristallisation, distillation, échange d'ions, extraction liquide-liquide...) pour voir le nombre pléthorique de canalisations, de colonnes, de cuves et de réacteurs au sein desquels le ou les procédés sont réalisés.*

De même, pour les industries de la santé, la formulation nécessite la conception, le développement, la production et l'écoulement de matériaux poreux (ou

non poreux) fonctionnant par leur composition, leur préparation et leur agencement pour délivrer une action et rendre un service (par exemple la galénique).

Après un bref rappel des principes fondamentaux de la mécanique des fluides appliqués aux cas d'écoulements de fluides parfaits ou visqueux newtoniens dans les conduites, ce texte fournit les notions de base indispensables sur l'hydrodynamique des écoulements dans les milieux poreux rencontrés dans les ***procédés de sédimentation et granulation****, de* ***réactions nécessitant un garnissage****, de* ***fluidisation*** *et de* ***filtration****.*

Notre but est de proposer la ou les relations qui existent :

— entre le débit de fluide et les propriétés caractéristiques du milieu poreux mobile et des fluides pour maintenir ce milieu poreux dans les conditions optimales de fonctionnement afin de réaliser le procédé et d'élaborer le produit voulu (sédimentation, fluidisation) ;

ou

— entre les pertes de charge nécessaires pour assurer un débit connu et optimum de fluide, compte tenu des propriétés caractéristiques du milieu poreux fixe (réacteurs, filtration).

Il est bien entendu que ce texte ne se veut nullement exhaustif et le lecteur se reportera utilement aux ouvrages hautement spécialisés présentés dans la bibliographie, pour une connaissance plus approfondie sur tel ou tel procédé.

1. Écoulement des fluides dans une canalisation

1.1 Fluides parfaits incompressibles en écoulement permanent

On considère le fluide de masse volumique ρ initialement entre les sections A_1B_1 et A_2B_2 puis entre les sections $A'_1B'_1$, $A'_2A'_2$ au temps dt. On désigne par A_1 l'aire de la section normale à l'axe A_1B_1 et par u_1 la vitesse dans cette section, A_2 l'aire en A_2B_2 et par u_2 la vitesse dans cette section (figure **1**).

Les équations de bilan sont les suivantes :

— **conservation de la matière**

$$\rho A_1 u_1 = \rho A_2 u_2 = q_m \quad (1)$$

avec q_m débit massique du fluide (kg · s^{-1}) ;

— **conservation de la quantité de mouvement (équation d'Euler)**

$$q_m (\vec{u_2} - \vec{u_1}) = \vec{F_e} \quad (2)$$

avec $\vec{F_e}$ résultante des forces extérieures (pesanteur, pression) ;

— **conservation de l'énergie (équation de Bernouilli)**

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = C^{te} \quad (3)$$

avec g accélération due au champ de pesanteur (m · s^{-2}),

P_1, P_2 pression statique (Pa),

z_1, z_2 cote, altitude (m).

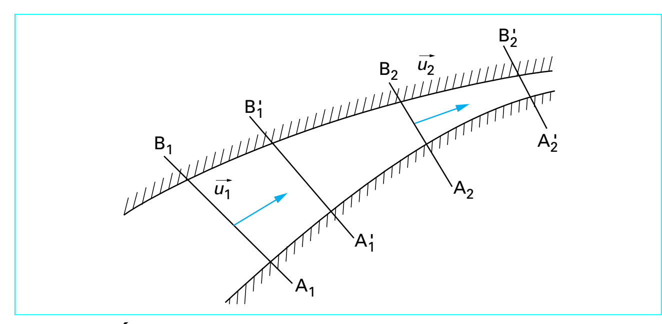


Figure 1 – Écoulement d'un fluide parfait incompressible dans une canalisation

1.2 Fluides réels. Viscosité

1.2.1 Définition

Les seules forces qui existent dans un fluide parfait sont normales à la paroi. Dans les fluides réels que considère la mécanique des fluides interviennent en plus des **forces de frottement ou de viscosité**, qui sont dans le plan de la paroi (fluides newtoniens).

La vitesse u_x des filets de fluide, parallèlement à l'axe Ox de la canalisation, varie suivant l'axe perpendiculaire Oz de la quantité $\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}z}$ par unité de longueur.

Ce gradient de vitesse est accompagné d'une force s'exerçant entre deux filets voisins et dirigée suivant Ox. Cette force par unité de surface séparant deux filets voisins, appelée contrainte de frotte-

ment τ, est proportionnelle au gradient de vitesse (relation de Newton) :

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}z}$$

Le coefficient de proportionnalité η, parfois noté μ, est la **viscosité dynamique** du fluide. On considère souvent aussi le quotient $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ qui est la **viscosité cinématique** du fluide.

Le tableau **1** rassemble les unités, dans différents systèmes, de ces deux grandeurs.

Tableau 1 – Unités courantes des viscosités dynamique et cinématique

Viscosité	Dimensions	SI	CGS	MKS
η (dynamique)	$M.L^{-1} \cdot T^{-1}$	Pa · s	Poise (Po) 10^{-1} Pa · s	Poiseuille (dap) (1) 10 Po
$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (cinématique)	$L^2 \cdot T^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Stokes (St) $10^{-4}\ m^2 \cdot s^{-1}$	Myriastokes (maSt) 10^4 St = 1 $m^2 \cdot s^{-1}$

(1) dap : décapoise.

1.2.2 Effet de la viscosité sur l'écoulement

Dans une canalisation de diamètre $d = 2R$, on considère le fluide newtonien contenu dans un cylindre de rayon r et de longueur $\mathrm{d}x$; p est la pression qui s'applique sur la face gauche et $p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ celle qui s'applique sur la face droite (figure **2**).

En régime permanent, la vitesse u ne dépend que de la distance r à l'axe de la conduite.

Un bilan des forces exercées sur le petit élément de volume $\pi r^2\,\mathrm{d}x$ s'écrit :

Force de pression + *Force de frottement* = 0

$$-\pi r^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - 2\pi r\,\mathrm{d}x\,\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 0$$

d'où la relation fondamentale pour les vitesses :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$$

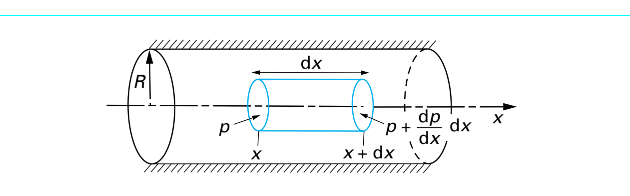


Figure 2 – Cylindre élémentaire de fluide newtonien en écoulement

1.2.3 Écoulement laminaire (*Re* < 2000)

Dans le cas où la vitesse d'écoulement est nulle lorsque le cylindre de fluide considéré a le même rayon que la canalisation ($u = 0$ pour $r = R$), la vitesse u s'exprime :

$$u = \frac{1}{4\eta}(R^2 - r^2)\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$$

Le profil des vitesses est parabolique.

Le débit volumique q_V est :

$$q_V = \int_0^{d/2} u \cdot 2\pi \cdot r \cdot \mathrm{d}r = \frac{\pi d^4}{128\eta}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$$

La vitesse moyenne, ou vitesse débitante, est :

$$u_m = \frac{q_V}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d^2}{32\eta}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$$

La chute de pression est donnée par la formule fondamentale de Poiseuille :

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{32\eta}{d^2}u_m \quad (4)$$

et la perte de charge linéaire :

$$-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{32\eta}{\rho g d^2}u_m \quad (5)$$

Nota : Le signe « – » rappelle que les pressions décroissent au fur et à mesure que l'on progresse dans le sens de l'écoulement.

Avec les termes adimensionnels :

facteur de frottement $\frac{f}{2} = \frac{gd}{4u_m^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$

et critère de Reynolds $Re = \frac{\rho u_m d}{\eta}$

l'expression de la perte de charge (5) devient :

$$\frac{f}{2} = \frac{8}{Re}$$

1.2.4 Écoulement turbulent (*Re* > 3000)

■ **Profil des vitesses** (profil de von Karman)

On définit une vitesse fictive $u^* = u_m\sqrt{\frac{f}{2}}$.

● *Au voisinage de la paroi*, l'écoulement reste **laminaire** sur une épaisseur y telle que $\frac{u^*\,y}{\nu} < 5$. Dans ce cas :

$$\frac{u}{u^*} = \frac{u^*\,y}{\nu} \quad (6)$$

● *Au centre de la canalisation*, il existe un noyau **turbulent** qui commence à une distance y de la paroi telle que $\frac{u^*\,y}{\nu} > 30$. Dans ce cas :

$$\frac{u}{u^*} = 5{,}75 \log\frac{u^*\,y}{\nu} + 5{,}5 \quad (7)$$

● *Dans la zone intermédiaire pour laquelle* $5 < \frac{u^* y}{\nu} < 30$, on a :

$$\frac{u}{u^*} = 11{,}5 \log \frac{u^* y}{\nu} - 3{,}05 \qquad \textbf{(8)}$$

Ces relations sont valables pour des **conduites dites lisses.**

Pour des **conduites rugueuses**, où la hauteur moyenne *e* des aspérités dépasse l'épaisseur de la couche laminaire $\left(\frac{u^* e}{\nu} > 5\right)$, on remplace ν^* par *e* dans les équations (6), (7) et (8) donnant les vitesses.

Le tableau **2** présente quelques valeurs moyennes de hauteurs des aspérités *e* de canalisations industrielles en différents matériaux.

Tableau 2 – Hauteurs moyennes des aspérités de canalisations industrielles

Type de canalisation	*e* (mm)
Tube étiré (cuivre, plomb, inox, verre)	0,001 à 0,010
Tube en acier neuf	0,01 à 0,10
Tube galvanisé	0,05 à 0,20
Tube asphalté	0,01 à 0,20
Tube en fonte neuf	0,8 à 1,5
Tube en fonte oxydé	0,8 à 1,5
Tube en fonte incrusté	1 à 3
Ciment poli, bois raboté	0,3 à 0,7
Ciment brut, planches rugueuses	0,7 à 2,5
Maçonnerie	5 à 15

■ **Perte de charge**

■ On utilise l'abaque de la figure **3** représentant les variations de $\frac{f}{2}$ en fonction de *Re* pour différentes valeurs de rugosité relative $\frac{e}{d}$ de la paroi.

Exemple 1 : soit une canalisation en acier galvanisé de 2" (tube gaz, série légère, NFE 29027) de diamètre intérieur réel $d = 53{,}8$ mm, de rugosité moyenne $e = 0{,}15$ mm ($\frac{e}{d} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$). Cette conduite véhicule de l'eau à 20 °C ($\rho = 1\,000$ kg · m^{-3} ; $\eta = 10^{-3}$ décapoises). On considère successivement trois débits volumiques.

● $\boldsymbol{q_v}$ **= 2,4 L · min^{-1}** soit $4 \cdot 10^{-5}$ m^3 · s^{-1}.

On a $u_m = \frac{q_v}{\pi d^2/4} = 1{,}76 \cdot 10^{-2}$ m · s^{-1} , d'où $Re = \frac{u_m d\rho}{\eta} = 947$.

Le régime d'écoulement est donc *laminaire* ($Re < 2 \cdot 10^3$) .

On en tire $\frac{f}{2} = \frac{8}{Re} = 8{,}45 \cdot 10^{-3}$, valeur que l'on peut bien sûr aussi lire directement sur l'abaque de la figure **3**.

La perte de charge linéaire sera

$$\left(-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{4u_m^2}{gd}\,\frac{f}{2} = 1{,}98 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{m}^{-1} .$$

La perte de charge est donc de l'ordre de *2 mm de colonne d'eau pour 100 m de conduite.*

On peut d'ailleurs noter que, d'une façon générale, les écoulements laminaires conduisent à des pertes de charge très faibles.

● $\boldsymbol{q_v}$ **= 16,5 L · min^{-1}** soit $2{,}75 \cdot 10^{-5}$ m^3 · s^{-1}.

$u_m = 0{,}121$ m · s^{-1} et $Re = 6{,}51 \cdot 10^3$

De plus, $\frac{e}{d} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$. Sur la figure **3**, le point de rencontre de la verticale $Re = 6{,}51 \cdot 10^3$ avec la courbe $\frac{f}{2}$ intrapolée donne $\frac{f}{2} = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$.

On a donc $\left(-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{4u_m^2}{gd}\, f/2$ soit $5{,}2 \cdot 10^{-4}$ m · m^{-1} .

La perte de charge est de l'ordre de *5 cm de colonne d'eau pour 100 m de conduite.*

● $\boldsymbol{q_v}$ **= 210 L · min^{-1}** soit $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3 · s^{-1}.

$u_m = 1{,}54$ m · s^{-1} et $Re = 8{,}28 \cdot 10^4$.

L'abaque de la figure **3** donne $\frac{f}{2} = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ et il vient $\left(-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\right) = 6 \cdot 10^{-2}$ m · m^{-1} , soit *6 m de colonne d'eau pour 100 m de conduite.*

Ces résultats sont résumés dans le tableau **3**.

Tableau 3 – Pertes de charge dans une canalisation en fonction du débit volumique (exemple 1)

q_v (m^3 · s^{-1})	u_m (m · s^{-1})	*Re*	$\frac{f}{2}$	$-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$ (mm d'eau · m^{-1})	(– d*H*) (mm d'eau pour 100 m de canalisation)
$4 \cdot 10^{-5}$	$1{,}76 \cdot 10^{-2}$	947	0,00845	$2 \cdot 10^{-2}$	2
$2{,}75 \cdot 10^{-5}$	0,121	6 510	0,0047	$52 \cdot 10^{-2}$	52
$3{,}5 \cdot 10^{-3}$	1,54	82 800	0,0034	60	6 000

2. Sédimentation

2.1 Mouvement d'une particule solide dans un fluide immobile

On considère une particule sphérique, de masse volumique ρ_g, de diamètre d_g, ayant une vitesse de sédimentation *U*, vitesse relative par rapport au fluide de masse volumique ρ_f et de viscosité η dans lequel elle sédimente.

On définit un critère de Reynolds de grain :

$$Re_g = \frac{\rho_f U d_g}{\eta}$$

Le grain est freiné dans son mouvement par le fluide et il apparaît une force de traînée *F* qui dépend du critère de Reynolds et de l'aire *A* du maître-couple :

$$F = Ne\ A\ \frac{\rho_f U^2}{2}$$

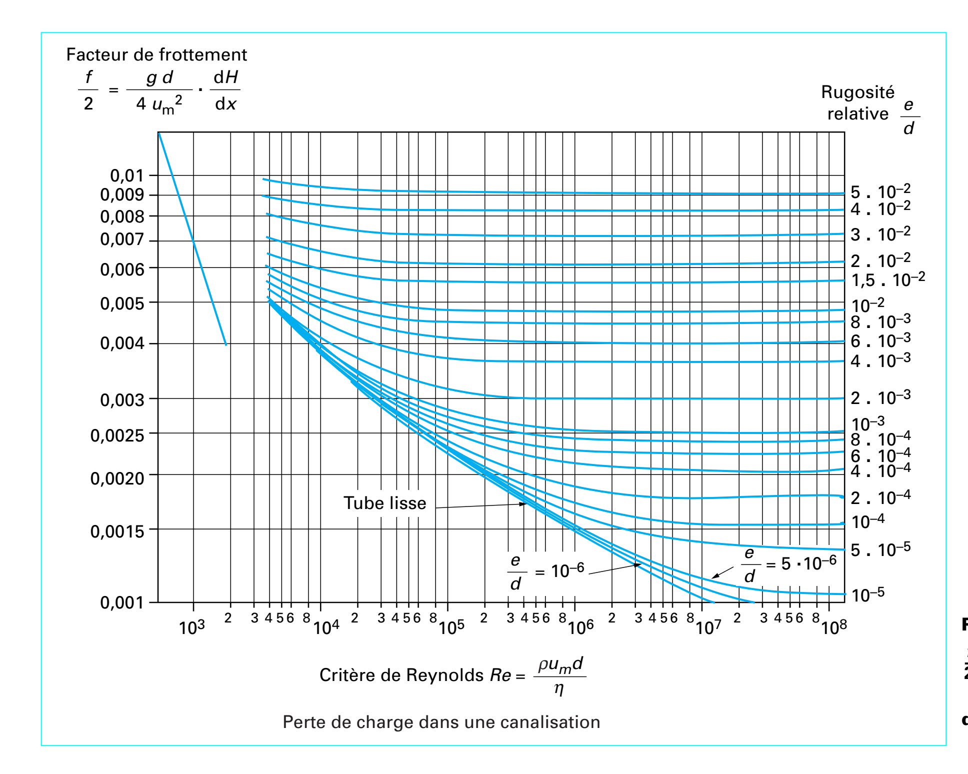


Figure 3 – Variation du facteur de frottement $\frac{f}{2}$ en fonction du critère de Reynolds *Re* pour différentes valeurs de rugosité relative $\frac{e}{d}$

avec *Ne* critère de Newton, appelée aussi C_D, coefficient de traînée d'une particule.

Le mouvement du grain obéit à des lois différentes suivant les valeurs du critère de Reynolds conduisant à différents régimes de sédimentation. Les expressions du critère de Newton *Ne* et de la vitesse de sédimentation *U* pour les différents régimes sont regroupées dans le tableau **4**.

Dans la quasi-totalité des cas, on connaît les masses volumiques du fluide et du grain, ainsi que la viscosité du fluide. Le problème posé est alors :

— soit de calculer la vitesse de chute *U* d'un grain de diamètre d_g donné ;

— soit de déterminer le diamètre d'un grain, ayant mesuré sa vitesse de sédimentation.

On utilise alors les critères adimensionnels *X*, proportionnel à d_g^3, et *Y*, proportionnel à U^3 :

$$X = Ne \cdot Re_g^2 = \frac{4\rho_f\,(\rho_g - \rho_f)\;g \cdot d_g^3}{3\;\eta^2} = K d_g^3$$

$$Y = \frac{Re_g}{Ne} = \frac{3\rho_g^2 \cdot U^3}{4\eta\;(\rho_g - \rho_f)\;g} = K' U^3$$

Les valeurs limites de *X* et *Y* en fonction du régime sont reportées dans le tableau **5**.

Donc, si d_g est connu et *U* inconnu, on calculera *X* que l'on comparera aux valeurs limites 24 et 440 000. Si, au contraire, *U* est donné et d_g inconnu, on calculera *Y* que l'on comparera à $\frac{1}{24}$ et 2 270.

Tableau 4 – Expression de la vitesse de sédimentation en fonction du régime

Régime	Re_g	*Ne*	Vitesse de sédimentation
Stokes	$Re_g < 1$	$Ne = \frac{24}{Re_g}$	$U = \frac{d_g^2\;(\rho_g - \rho_f)\;g}{18\;\eta}$ **(9)**
Intermédiaire (Allen)	$1 < Re_g < 10^3$	$Ne = \frac{18{,}5}{Re_g^{0{,}6}}$	$U = \frac{d_g^{1{,}14}\;[(\rho_g - \rho_f)\;g]^{0{,}714}}{6{,}55\;\eta^{0{,}428}\;\rho_f^{0{,}286}}$ **(10)**
Newton	$10^3 < Re_g < 4 \cdot 10^5$	$Ne = 0{,}44 \pm 0{,}02$	$U = \left[\frac{3\,d_g\;(\rho_g - \rho_f)\;g}{\rho_f}\right]^{1/2}$ **(11)**

Tableau 5 – Valeurs limites des critères adimensionnels X et Y en fonction du régime

Régime	X	Y
Stokes	$X < 24$	$Y < \frac{1}{24}$
Intermédiaire	$24 < X < 440\,000$	$\frac{1}{24} < Y < 2\,270$
Newton	440 000	$Y > 2\,270$

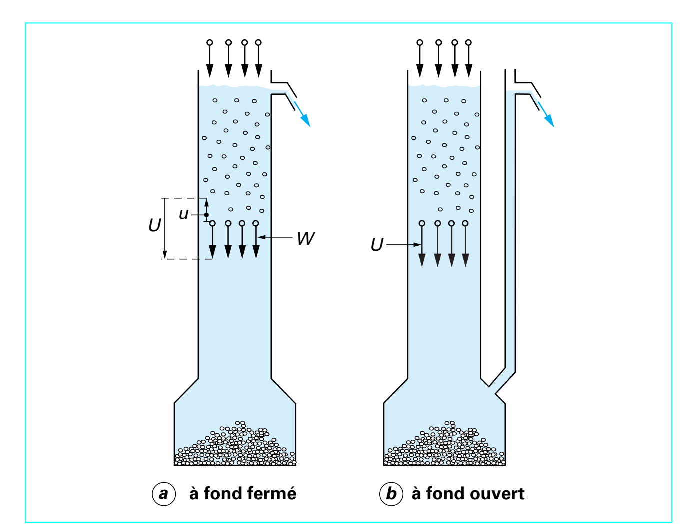


Figure 4 – Sédimentation collective d'une suspension de particules dans une colonne

2.2 Sédimentation d'une suspension de particules en régime de Stokes

Tant que la teneur volumique β de la suspension en matières solides reste inférieure à 0,4, on considère que la suspension se comporte comme un liquide newtonien dont la viscosité apparente est :

$$\eta_A = \eta \cdot 10^{1{,}82\beta}$$

et la masse volumique apparente :

$$\rho_A = \beta\,\rho_g + (1 - \beta)\,\rho_f$$

Pour déterminer la vitesse de sédimentation U, on utilise la relation (9) pour une particule, présentée dans le tableau **5** en remplaçant ρ_f par ρ_A et η par η_A.

Par ailleurs, lorsque la sédimentation a lieu de façon discontinue dans un récipient fermé à sa base (figure **4 *a***), l'accumulation de grains dans le fond du récipient chasse un volume égal de liquide qui remonte avec une vitesse ascensionnelle u par rapport à la paroi.

Par suite, la vitesse U, qui est la vitesse de la particule par rapport au fluide, sera égale à la vitesse W (vitesse de la particule par rapport à la paroi fixe du récipient) augmentée de la vitesse ascensionnelle u :

$$U = W + u$$

L'égalité des volumes solides descendants et des volumes liquides ascendants se traduit par :

$$\beta\,W = (1 - \beta)\,u$$

En combinant ces deux équations, on a :

$$W = (1 - \beta)\,U$$

Enfin, pour tout le domaine de variation de β, les résultats expérimentaux peuvent être représentés par le rapport $\frac{W}{U}$, fonction de Re_g, $\frac{d_g}{d_R}$ et β (relation empirique de Richardson et Zaki) :

$$\frac{W}{U} = (1 - \beta)^r$$

L'exposant r dépend du régime d'écoulement et du diamètre du récipient d_R.

Dans le cas limite d'un récipient de très grand diamètre ($d_R >> d_g$), on a :

$r = 4{,}6$ en régime de Stokes, avec $Re_g << 0{,}2$

$r = 2{,}4$ en régime de Newton, avec $Re_g > 500$.

La variation de r en fonction de Re_g et de $\frac{d_g}{d_R}$ entre ces deux limites est donnée dans le tableau **6**.

Tableau 6 – Valeurs de r en fonction de Re_g et de $\frac{d_g}{d_R}$

Re_g	Exposant r
$0 < Re_g < 0{,}2$	$r = 4{,}6 + 20\,\frac{d_g}{d_R}$
$0{,}2 < Re_g < 1$	$r = \left(4{,}4 + 18\,\frac{d_g}{d_R}\right) Re_g^{-0{,}03}$
$1 < Re_g < 200$	$r = \left(4{,}4 + 18\,\frac{d_g}{d_R}\right) Re_g^{-0{,}1}$
$200 < Re_g < 500$	$r = 4{,}4 \cdot Re_g^{-0{,}1}$
$Re_g > 500$	$r = 2{,}4$

La comparaison théorie-expérience montre que l'accord est excellent uniquement en régime de Stokes, régime le plus courant à l'échelle industrielle.

Quand la sédimentation est à fond ouvert ($u = 0$), les particules sédimentent avec la vitesse $U = W$ (figure **4 *b***).

Pour dimensionner la hauteur Z de la tour de sédimentation utilisée pour un procédé nécessitant un temps de séjour t_s (échange d'ions, agglomération, enrobage, séchage...), il vient :

$$Z = t_s\,W$$

3. Mouvement de gouttes et de bulles

Un globule fluide se distingue d'un globule sphérique rigide par sa viscosité η_g qui n'est pas infinie et par la tension interfaciale globule/phase continue σ.

Pour un globule sphérique de diamètre d, qui n'est soumis ni à des déformations ni à des oscillations, et en écoulement laminaire ($Re_g < 1$), la vitesse du globule est égale à la vitesse de chute libre donnée par la formule de Stokes (9), multipliée par un facteur correctif, coefficient de Hadamard H :

$$H = \frac{3\eta + 3\eta_g}{2\eta + 3\eta_g} \quad \textbf{(12)}$$

Les globules de grande dimension ne restent pas sphériques. Sous l'influence des forces normales de pression dynamique, ils se déforment. Cette déformation résulte de l'équilibre des forces dynamiques, hydrostatiques et de tension interfaciale. Elle consiste en un aplatissement, ce qui augmente l'aire du maître-couple, donc de la traînée et par suite, une diminution de la vitesse de déplacement. De plus, une turbulence apparaît à l'arrière du globule.

Comme en général les forces de viscosité interviennent en même temps que les forces interfaciales, on introduit trois critères adimensionnels Eötvos, Weber et P, qui permettent de comparer les forces s'appliquant sur les particules :

$$Eö = \frac{g\,(\rho_g - \rho_f)\,d^2}{\sigma}, \text{ c'est-à-dire } \frac{\text{pesanteur}}{\text{tension interfaciale}}$$

$$We = \frac{\rho_g U^2 d}{\sigma}, \text{ c'est-à-dire } \frac{\text{inertie}}{\text{tension interfaciale}}$$

$$P = \frac{\sigma^3 \rho_f^2}{\eta^4 g\,(\rho_g - \rho_f)}$$

3.1 Vitesse de déplacement d'une goutte

L'allure des variations de la vitesse d'une goutte en fonction de son diamètre, représentée sur la figure **5**, fait apparaître l'existence de trois régimes, caractérisés par le critère de Froude Fr (rapport des forces cinétiques aux forces volumiques).

- **Régime de Stokes**

La goutte est une sphère rigide.

$$Fr = \frac{\rho_f U^2}{gd\,(\rho_g - \rho_f)} = \frac{Re_g}{18}$$

- **Régime intermédiaire**

La déformation de la goutte n'est plus négligeable.

La vitesse passe par un maximum quand le diamètre croît.

$$Fr = 0{,}116\,(Re_g)^{1/2}\left(1 - \frac{Eö}{6}\right)^{3/2}$$

- **Régime d'Eötvos**

La déformation est grande et la vitesse de la goutte est constante.

$$Fr = 2{,}3 \cdot Eö^{-1/2}$$

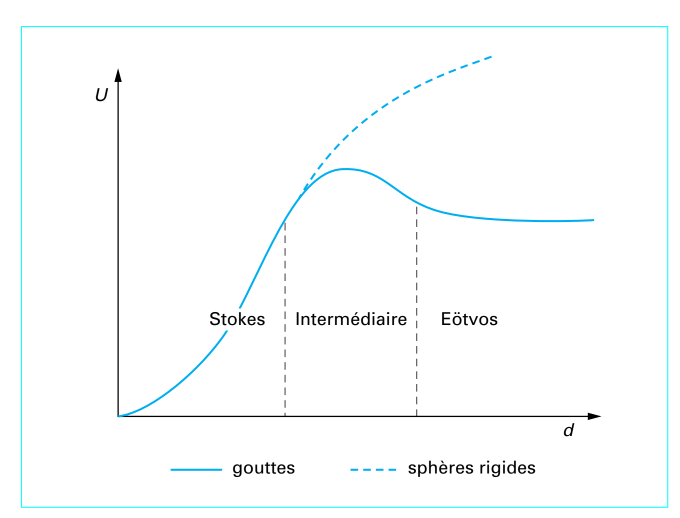


Figure 5 – Allure des variations de la vitesse de déplacement d'une goutte en fonction de son diamètre

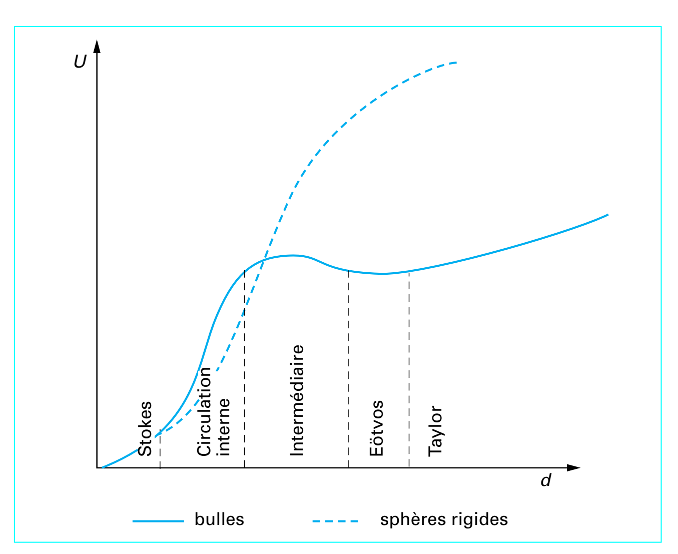


Figure 6 – Allure des variations de la vitesse de déplacement d'une bulle en fonction de son diamètre

3.2 Vitesse de déplacement d'une bulle

Quand une bulle monte dans un liquide, l'allure des variations de sa vitesse en fonction de son diamètre, représentée sur la figure **6**, laisse apparaître l'existence de cinq régimes.

- **Régime de Stokes**

La bulle est une sphère rigide.

- **Régime de circulation interne**

La vitesse de la bulle peut être au maximum augmentée de 50 % par rapport à celle de la loi de Stokes (9), selon le coefficient H (12).

- **Régime intermédiaire**

La déformation de la bulle n'est pas négligeable. La vitesse passe par un maximum.

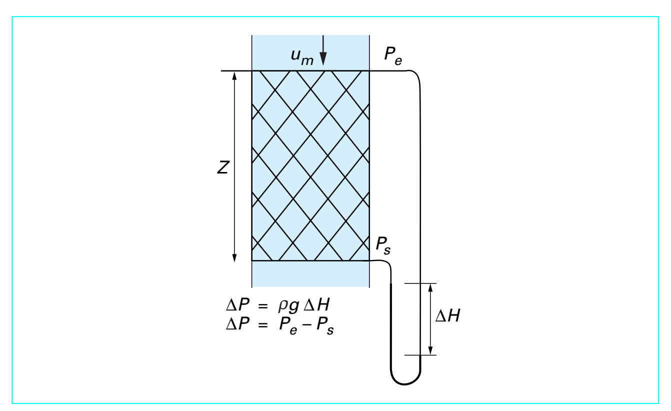


Figure 7 – Écoulement d'un fluide à travers un lit de particules

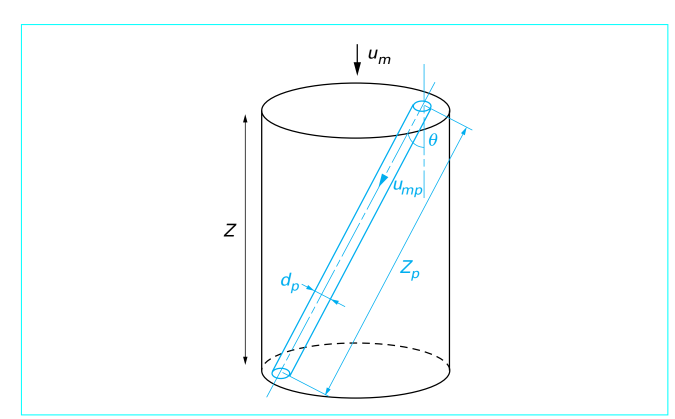


Figure 8 – Milieu poreux. Modèle de Kozeny

■ **Régime d'Eötvos**

La déformation est importante. La vitesse est indépendante du diamètre.

■ **Régime de Taylor**

Ce régime est obtenu pour les très grosses bulles en forme de champignon. On a alors :

$$U \simeq \sqrt{\frac{gd}{2}} \quad \text{soit} \quad Fr \simeq 0{,}5$$

4. Écoulement à travers un lit de particules

4.1 Loi de Darcy. Définition de la perméabilité

Considérons une conduite de section droite S contenant un lit poreux de hauteur Z à travers lequel coule un liquide de viscosité η à un débit volumique q_v (figure **7**). Darcy a observé que la perte de charge ΔP à travers le lit est proportionnelle à la hauteur Z du lit, à la vitesse en fût vide, ou vitesse moyenne, $u_m = \frac{q_v}{S}$ et à la viscosité η :

$$u_m = \frac{B}{\eta} \cdot \frac{\Delta P}{Z} \tag{13}$$

B étant **la perméabilité** dont la dimension est le carré d'une longueur.

Cette relation est parfaitement vérifiée en régime laminaire, la dégradation d'énergie provenant uniquement des frottements visqueux. Si la vitesse croît, l'expression de la perte de charge se complique par l'introduction d'un terme proportionnel au carré de la vitesse moyenne, preuve d'une dégradation d'énergie par turbulence.

Pour tenir compte de ces considérations et déterminer la perte de charge en fonction de la vitesse u_m et des propriétés caractéristiques du milieu poreux, on utilise le modèle de Kozeny.

4.2 Modèle de Kozeny. Relation de Kozeny-Carman

Le milieu poreux réel, extrêmement complexe, est remplacé par un modèle simplifié, décrit mathématiquement à l'aide d'un nombre réduit de paramètres indépendants.

Les **propriétés caractéristiques** du milieu poreux sont la *porosité* ε (le volume de vide du milieu poreux est εSZ) et la *surface spécifique* d'un grain a_g constituant ce milieu poreux :

$$a_g = \frac{\text{surface d'un grain}}{\text{volume d'un grain}} = \frac{\text{surface de tous les grains}}{\text{volume de tous les grains}}$$

On assimile le milieu poreux de volume $V = SZ$ à un faisceau de N pores identiques, droits et indépendants, de longueur Z_p et de diamètre d_p, mais dont la section n'est pas circulaire (facteur de circularité $\gamma = 1 \pm 0{,}15$). Ce modèle est représenté figure **8**.

On appelle **tortuosité** le rapport $T = \frac{Z_p}{Z}$.

On suppose que le régime d'écoulement est laminaire dans les pores. La relation de Poiseuille (4) s'applique donc :

$$u_{mp} = \frac{d_p^2}{32 \gamma \eta} \frac{\Delta P}{Z_p}$$

En écrivant :

— l'égalité du débit de fluide en fût vide et du débit de fluide dans les pores $u_{mp} = \frac{u_m}{\varepsilon} \cdot \frac{Z_p}{Z}$;

— l'égalité des surfaces internes du milieu poreux et du modèle $a_g V (1 - \varepsilon) = N \pi d_p Z_p$;

— l'égalité des porosités du milieu poreux et du modèle $\varepsilon V = N \frac{\pi d_p^2}{4} Z_p$,

la relation de Poiseuille (4) devient la relation de Kozeny-Carman :

$$\frac{\Delta P}{Z} = h_K \eta u_m a_g^2 \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \tag{14}$$

La constante de Kozeny h_K vaut :

— pour des empilages de grains isométriques avec des porosités n'excédant pas 0,7 à 0,8, $h_K = 4{,}5 \pm 1{,}5$ et en pratique 5 ;

— pour des empilages de fibres à porosité plus élevée, $h_K = 9$ pour $\varepsilon = 0{,}94$ et $h_K = 22$ pour $\varepsilon = 0{,}99$.

La relation de Kozeny-Carman (14) peut s'exprimer en fonction du diamètre $d_g = \dfrac{6}{a_g}$, diamètre de la sphère possédant la même surface spécifique que le grain :

$$\frac{\Delta P}{Z} = 36\ h_K\ \frac{\eta\ u_m(1-\varepsilon)^2}{d_g^2\ \ \varepsilon^3}$$

4.3 Régimes laminaire et turbulent. Relation d'Ergun

On constate pratiquement que la valeur critique du critère de Reynolds de pores Re_p au-delà de laquelle on quitte le régime laminaire est de l'ordre de 6. De façon analogue, en définissant un critère de Reynolds de pores modifié Re'_p, on quitte le régime laminaire pour $Re'_p > 1$,

$$\text{avec}\quad Re_p = \frac{\rho u_{mp} d_p}{\eta} \quad \text{et} \quad Re'_p = \frac{\rho u_m}{(1-\varepsilon)\ a_g \eta} = \frac{Re_p}{4T}.$$

On démontre alors que la perte de charge correspondante est de la forme :

$$\frac{\Delta P}{Z} = h_B\ \frac{a_g\ (1-\varepsilon)}{\varepsilon^3}\ \rho u_m^2 \qquad \textbf{(15)}$$

où h_B = 0,3 est la constante de Burke-Plummer.

La perte de charge totale s'exprime alors par addition de deux quantités : celle due aux pertes de charge par frottement visqueux contre les parois, relation de Kozeny-Carman (14), et d'autre part celle due aux pertes par turbulence, relation de Burke-Plummer (15) ; c'est la relation d'Ergun :

$$\frac{\Delta P}{Z} = h_K\ \frac{\eta a_g^2\ (1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}\ u_m + h_B\ \frac{\rho a_g\ (1-\varepsilon)}{\varepsilon^3}\ u_m^2 \qquad \textbf{(16)}$$

qui s'écrit encore sous forme adimensionnelle :

$$\frac{f'}{2} = \frac{h_K}{Re'_p} + h_B \quad \text{avec} \quad \frac{f'}{2} = \frac{\varepsilon^3}{a_g\ (1-\varepsilon)\ \rho\ u_m^2}\ \frac{\Delta P}{Z}$$

5. Fluidisation

On considère un lit de particules de diamètre d_g, disposées sur une plaque poreuse. Ce lit est traversé par un fluide ascendant dont on augmente progressivement la vitesse u_m en fût vide (figure **9 *a***).

Pour un certain débit, la perte de charge dans le lit, de hauteur initiale Z_i et de porosité ε_i, est la suivante :

$$\Delta P = Z_i\ 36\ h_K\ \frac{\eta}{d_g^2}\ \frac{(1-\varepsilon_i)^2}{\varepsilon_i^3}\ u_{min}$$

Lorsqu'elle est égale au poids du lit par unité de surface (1 Pa = 1 N · m^{-2}), c'est-à-dire :

$$\Delta P = Z_i\ (\rho_g - \rho_f)(1-\varepsilon_i) g,$$

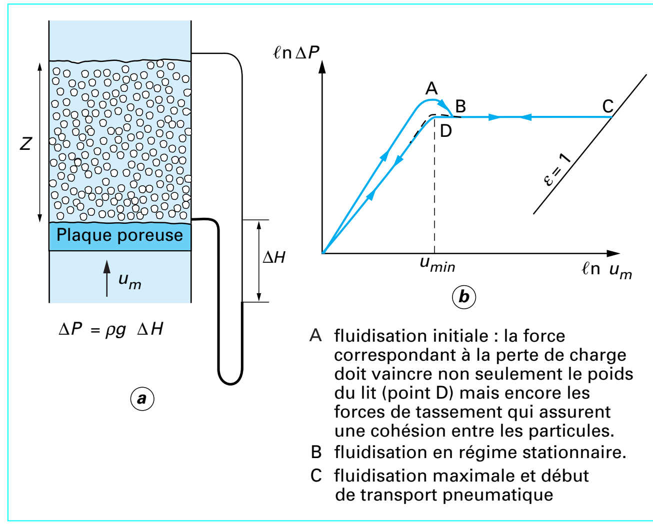


Figure 9 – Fluidisation

le lit commence à se soulever. C'est le **seuil de fluidisation** (figure **9 *b***, points A et D), caractérisé par la vitesse minimale de fluidisation :

$$u_{min} = \frac{d_g^2\ \varepsilon_i^3\ (\rho_g - \rho_f)\ g}{36\ h_K\ \eta\ (1-\varepsilon_i)}$$

Au-delà de cette vitesse (figure **9 *b***, segment BC), les grains sont individualisés et sujets à des mouvements variés dans toutes les directions. Mais, pour une vitesse donnée, leur position moyenne reste statistiquement fixe ; le lit a donc une hauteur Z constante, qui croît quand le débit de fluide croît :

$$\frac{Z}{Z_i} = \frac{1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon}$$

La perte de charge reste constante pendant la fluidisation, la porosité du lit fluidisé augmente avec la hauteur Z et avec la vitesse u_m :

$$\frac{u_m}{u_{min}} = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i^3} \cdot \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}$$

Si on augmente encore le débit, on va atteindre la vitesse correspondant à celle qu'auraient les grains s'ils tombaient en chute libre dans le fluide immobile (figure **9 *b***, point C). On aura alors entraînement des grains qui seront éliminés dans le sens courant. C'est la **vitesse maximale de fluidisation** (qui correspond à la vitesse de sédimentation des grains) :

$$u_{max} = \frac{d_g^2\ (\rho_g - \rho_f)\ g}{18\eta}$$

On a alors :

$$\frac{u_{max}}{u_{min}} = \frac{10\ (1-\varepsilon_i)}{\varepsilon_i^3}$$

qui oscille généralement entre 50 et 100.

Cette représentation du lit fluidisé est idéalisée. Elle correspond à une **fluidisation homogène** dans laquelle les grains sont uniformé-

ment dispersés dans tout le lit, la porosité locale étant constante d'un point à un autre du lit $\left(\frac{\rho_g}{\rho_f} = 1\right)$.

Mais la plupart des opérations industrielles sont réalisées en phase gazeuse $\left(\frac{\rho_g}{\rho_f} >> 1\right)$. Dans ce cas, **la fluidisation devient hétérogène**. Certaines parties du lit sont immobiles, tandis que d'autres sont traversées par de grosses bulles gazeuses de vitesse uB et contenant une faible proportion de grains en suspension. Ces bulles viennent éclater à la surface du lit : c'est le bullage ou bouillonnage, et même le pistonnage si ces bulles occupent la section droite du lit.

Pour mieux connaître le **comportement d'une poudre vis-à-vis de la fluidisation hétérogène**, Geldart a proposé une classification des poudres qu'il répartit en quatre classes en fonction de leur masse volumique et de leur diamètre moyen (figure **10**).

Cette classification est reprise par Castel dans *Manutention des produits en vrac*, A 9 301, traité L'entreprise industrielle.

■ **Classe A : les poudres fusantes**. Elles se caractérisent par :

— une *fluidisation particulaire* qui se traduit par une forte expansion du lit avec la croissance de la vitesse de fluidisation et l'apparition du bullage quand la vitesse du gaz est nettement supérieure à la vitesse minimale de fluidisation ;

— une *désaération lente* (3 à 6 mm · s^{-1}) quand la fluidisation est interrompue : ces poudres restent longtemps fluides ;

— une tendance au *fusage* lors de la vidange d'une trémie, c'est-à-dire un écoulement de type fluide à travers l'obturateur.

■ **Classe B : les poudres sableuses**. Elles ont en commun :

— une *fluidisation agrégative* avec une faible expansion du lit tant que la vitesse minimale de fluidisation, à laquelle apparaissent déjà les premières bulles de gaz n'est pas atteinte ; ces bulles sont exemptes de solide et grossissent rapidement par coalescence au cours de leur ascension ;

— une *désaération quasi instantanée* à l'arrêt de la fluidisation.

■ **Classe C : les poudres fines cohésives.** Les forces de surface interparticulaires y sont du même ordre de grandeur que les forces aérodynamiques de traînée exercées par le gaz sur les particules. Ces forces de surface peuvent avoir des origines multiples : attractions moléculaires, électricité statique, eau adsorbée ou adhésivité du produit. Ces poudres sont difficiles à fluidiser et sont le siège de renardages (formation de canaux de gaz) dans les lits de grand diamètre ou de pistonnages (alternance de couches de gaz et de particules) dans les lits de petite section. Leur fluidisation, quand elle est possible, ne peut se faire qu'avec l'appoint d'énergie mécanique (agitation ou vibration).

■ **Classe D : les poudres granuleuses**. Les particules y sont de grande taille (d_g > 1 mm) ou de masse volumique élevée ; elles se caractérisent par une vitesse de fluidisation élevée (lits geyser) et une *fluidisation turbulente* avec explosion de bulles en surface du lit.

Exemple 2 : Séchage de granules en lit fluidisé. Mise en fluidisation du lit. Domaine de fluidisation.

On désire sécher des granules sphériques de diamètre 500 µm essentiellement constitués de lactose de l'amidon et pour une très faible part de principe actif. La masse volumique de la matière sèche est de 1 500 kg · m^{-3}. La teneur en eau des granules est n_s = 4 kg d'eau par kilogramme de matière sèche et des mesures préliminaires indiquent qu'ils suivent la loi d'hygroscopicité standard.

Le séchage est effectué par de l'air à 50 °C dont l'humidité relative est 0,15. La viscosité de l'air à 50 °C est 1,9 · 10^{-5} dap et sa masse volumique dans les conditions normales de température et pression est de 1,292 kg · m^{-3}.

La porosité du lit au repos est $\varepsilon = 0{,}4$.

■ Déterminons tout d'abord **la vitesse limite séparant les écoulements laminaire et turbulent de l'air** dans le lit de granulés et **la perte de charge correspondante**.

L'écoulement laminaire cesse quand le nombre de Reynolds de pore modifié dépasse 1 :

$$Re'_p = \frac{\rho\ u_m}{(1-\varepsilon)\ a_g\ \eta} = 1$$

donc pour

$$u_m = \frac{(1-\varepsilon)\ a_g\ \eta}{\rho}$$

Dans le cas des sphères, la surface spécifique de la particule est $a_g = \frac{6}{d_g} = 1{,}2 \cdot 10^4\ \text{m}^{-1}$.

On en déduit

$$u_m = \frac{0{,}6 \times 6 \times 1{,}9 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-4} \times 1{,}3 \times \frac{273}{323}} = 12{,}55\ \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La perte de charge résultante par unité de hauteur de lit est alors donnée par la loi de Kozeny-Carman **(14)** avec $h_k = 5$ et $\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} = \frac{(0{,}6)^2}{(0{,}4)^3} = 5{,}65$.

Si Z est la hauteur de lit, il vient donc

$$\frac{\Delta P}{Z} = 5 \times 1{,}9 \cdot 10^{-5} \times 12{,}55 \cdot 10^{-5} \times (1{,}2 \cdot 10^4)^2\ \times 5{,}65$$

$$= 9\ 720\ \text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$$

■ Comparons maintenant de cette perte de charge avec le **poids du lit par unité de hauteur et par unité de section droite**.

Si S est la section droite de la colonne et Z la hauteur du lit, le poids du lit sera $P = SZ\ (1-\varepsilon)\ \rho_s g$

avec ρ_s masse volumique du matériau humide.

$$\frac{P}{SZ} = (1-\varepsilon)\ \rho_s g$$

La masse volumique du matériau humide est la moyenne harmonique des masses volumiques de la matière sèche et de l'eau pondérée par les titres massiques de la matière sèche et de l'eau dans le granulé :

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{1/14}{\rho_M} + \frac{0{,}4/1{,}4}{\rho_e} = \frac{0{,}713}{1\ 500} + \frac{0{,}286}{1\ 000} = 0{,}760 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$\rho_s \approx 1\ 300\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Le poids du lit par unité de section droite et unité de hauteur devient alors : $\frac{P}{SZ} = 1\ 300 \times 0{,}6 \times 9{,}81 = 7\ 650\ \text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$.

Cette grandeur est inférieure à la perte de charge calculée précédemment : **au début de la fluidisation du lit, l'écoulement de l'air est donc laminaire**.

■ Calculons la **vitesse minimale de fluidisation**, en début de séchage.

D'après les résultats précédents (régime laminaire), on peut calculer la vitesse minimale de fluidisation en utilisant le modèle de Kozeny : la perte de charge doit équilibrer le poids du lit par unité de section droite.

$$\frac{P}{SZ} = 7{,}680\ \cdot 10^3\ \text{Pa} \cdot \text{m}^{-1} = \frac{\Delta P}{Z} = h_K\ \eta\ a_g^2\ \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}\ u_{min}$$

Il vient $u_{min} = \frac{7{,}680}{5 \times 1{,}9 \times 1{,}44 \times 5{,}65} = 10^{-1}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Nota : supposons des grains dix fois plus gros, soit 5 mm de diamètre, toutes choses égales par ailleurs. La surface spécifique serait donc divisée par 10, la perte de charge par 100, le poids du lit ne variant pas. Le début de la fluidisation se passerait donc en écoulement turbulent et la vitesse minimale de fluidisation devrait être calculée non plus à partir de la formule de Kozeny-Carman **(14)**, mais à partir de celle d'Ergun **(16)**.

■ Calculons enfin la **vitesse d'entraînement en fin de séchage**.

Admettons que le grain soit complètement sec, sans avoir subi de variation de volume. L'eau étant remplacée par de l'air dans les pores, la masse volumique du grain (et non de la matière sèche) a diminué. Négligeons la contribution de l'air, 1 500 fois plus léger que le matériau.

1 m^3 de matériau pesait à l'origine 1 300 kg. La fraction pondérale 0,297 d'eau lui est totalement enlevée. Le volume de 1 m^3 de matériau pèse alors 1 300 x 0,713 = 930 kg. La masse volumique du granulé devient alors $\rho_s = 930\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Pour connaître le régime d'écoulement, on calcule le nombre X :

$$X = \frac{4}{3}\frac{\rho\,(\rho_s - \rho) g d_g^3}{\eta^2} = \frac{4}{3}\frac{1{,}09 \times 930 \times 9{,}81 \times (5)^3 \times (10^{-4})^3}{(1{,}9)^2 \times (10^{-5})^2} = 4\ 590$$

On se trouve donc en régime intermédiaire d'Allen **(10)**.

On sait que dans ce régime $X = Re_g^2\ Ne$ et $Ne = \dfrac{18{,}5}{Re_g^{0{,}6}}$

Il vient donc $Re_g^{1{,}4} = \dfrac{X}{18{,}5} = 248$.

On en déduit $Re_g = \dfrac{\rho U d_g}{\eta}$,

il vient $u = 1{,}80\ \text{ms}^{-1}$

On peut aussi calculer la vitesse en régime intermédiaire de Allen **(10)** qui donne $U = 1{,}89\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il en résulte que l'on peut fluidiser entre les deux vitesses limites

$$\mathbf{0{,}1\ m \cdot s^{-1} < U < 1{,}90\ m \cdot s^{-1}}$$

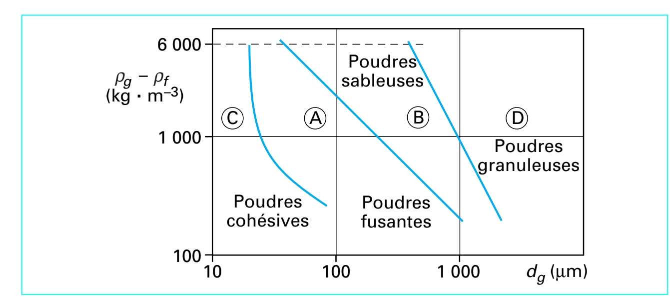


Figure 10 – Classification des poudres

6. Filtration

Le but de la filtration est la séparation d'une phase continue et d'une phase dispersée, initialement mélangées ; ce mélange est désigné sous le terme général de *suspension* (ou préfiltre).

La séparation peut être effectuée de deux façons différentes.

■ **Filtration dans la masse**

La suspension s'écoule à travers une masse poreuse (lit de particules consolidé ou non, papier, feutre...) à l'intérieur de laquelle les particules ou globules de la phase dispersée sont plus ou moins retenus, entraînant un colmatage progressif de la masse filtrante. La phase continue sortant de la masse poreuse, appelée *filtrat* pour les liquides, sera soit parfaitement pure, soit appauvrie en phase dispersée.

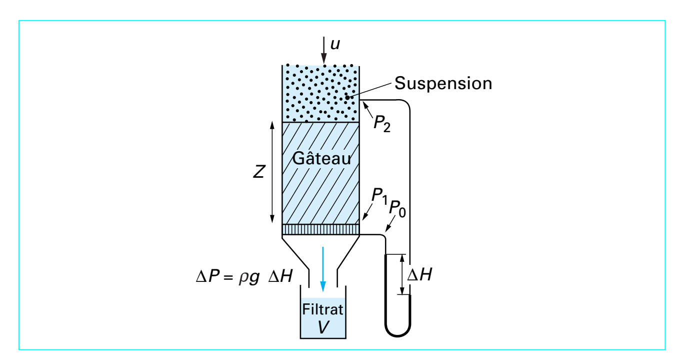


Figure 11 – Filtration des liquides

■ **Filtration sur support**

On amène la suspension au-dessus d'un support (toile, feutre, membrane, grille...) sur lequel les particules vont se déposer sous la forme d'un *gâteau* d'épaisseur croissante. Le *filtrat* est recueilli sous le support.

6.1 Lois générales

On considère l'expérience de filtration d'une suspension schématisée sur la figure **11**.

À l'instant *t*, l'épaisseur du gâteau est *Z* et le volume du filtrat recueilli est *V*.

Une pression ΔP est appliquée au-dessus de la suspension.

Le problème posé par la filtration consiste à déterminer les variations du volume de filtrat *V*, de la perte de charge ΔP et de la hauteur du gâteau *Z* en fonction du temps *t*, compte tenu des propriétés du préfiltre et du gâteau.

Appelons q_v le débit volumique instantané de filtrat et posons

$$q_v = \frac{dV}{dt} = \Omega u\ , \qquad \textbf{(17)}$$

Ω étant la surface filtrante. Supposons par ailleurs que le gâteau est homogène et incompressible et que le régime d'écoulement à travers le gâteau est laminaire.

On observe que la perte de charge ΔP est proportionnelle au débit instantané et à la viscosité du fluide (loi de Darcy, § 4.1) :

$$\Delta P = R\,\eta u \qquad \textbf{(18)}$$

avec R somme des résistances du support R_s et du gâteau en cours de formation R_G (m^{-1}).

On définit alors une résistance spécifique du gâteau α telle que

$$R_G = \alpha\ M/\Omega \qquad \textbf{(19)}$$

avec $M = \Omega Z (1 - \varepsilon)\, \rho_G$ masse de gâteau séché,

ρ_G masse volumique du gâteau,

donc M/Ω masse de matériau séché déposé par unité de surface filtrante.

La comparaison avec la loi de Darcy (13) où intervient la perméabilité *B* du gâteau donne :

$$\alpha = \frac{1}{B\,(1 - \varepsilon)\,\rho_G}$$

6.1.1 Relation entre l'épaisseur *Z* du gâteau et le volume de filtrat *V*

On suppose que la masse M du gâteau est à chaque instant proportionnelle au volume V de filtrat recueilli :

$$M = W\,V$$

avec W masse de particules ou de gâteau séché déposé par unité de volume de filtrat.

La filtration d'une masse S de suspension donne :

— un gâteau séché de masse $M = s\,S$;
— un gâteau humide de masse $M' = m\,s\,S$;
— une masse de filtrat $\rho_f\,V = (1 - m\,s)\,S$,

avec s teneur en particules de la suspension,

ρ_f masse volumique du filtrat,

m rapport d'humidité $\left(\dfrac{\text{masse de gâteau humide}}{\text{masse de gâteau séché}}\right)$,

d'où $W = \dfrac{\Omega Z\,(1-\varepsilon)\,\rho_G}{V} = \dfrac{\rho_f s}{1 - m\,s}$

avec la relation entre le rapport d'humidité m et la porosité ε :

$$m = 1 + \frac{\varepsilon \rho_f}{(1-\varepsilon)\;\rho_G}$$

6.1.2 Vitesse de filtration

En utilisant l'expression de la perte de charge (18) avec celles de la résistance du gâteau R_G (19) et de la vitesse de filtration u (17), il vient :

$$\Delta P = \left(R_s + \frac{\alpha W V}{\Omega}\right)\frac{\eta}{\Omega}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \qquad \textbf{(20)}$$

Si la filtration est à pression constante (sous vide ou sous pression), alors $\Delta P = C^{te}$ et l'équation (20) devient :

$$\frac{t}{V} = \frac{R_s \eta}{\Omega \Delta P} + \frac{\alpha W \eta V}{2\Omega^2 \Delta P}$$

6.1.3 Résistance du support R_s et résistance spécifique du gâteau α. Équation de Ruth

On définit : $R_s = \alpha W V_0 / \Omega$

avec V_0 volume fictif de filtrat qui correspondrait à la formation d'un gâteau de même résistance que la membrane. Le temps nécessaire à cette formation est t_0.

Il vient, en utilisant l'expression de la vitesse de filtration (17) et en intégrant à pression constante

$$t_0 + t = a\,(V_0 + V)^2$$

avec $a = \dfrac{\alpha W \eta}{2\Omega^2\,\Delta P}$

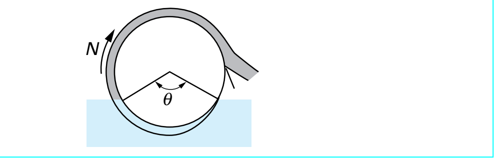


Figure 13 – Filtre-tambour pour filtration continue sous vide

L'utilité de cette équation réside dans la comparaison de la résistance spécifique du gâteau et de la résistance du support pour savoir s'il est raisonnable de négliger cette dernière.

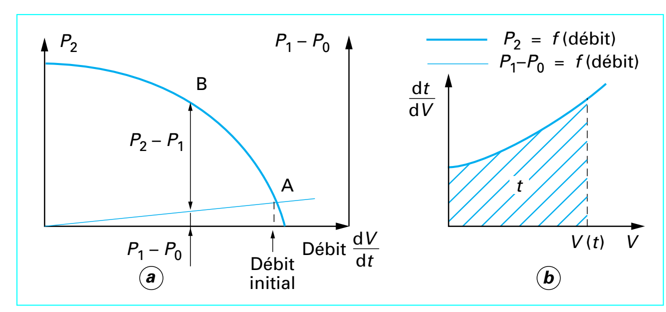


Figure 12 – Variation des pressions en fonction du débit pour une filtration à pression et débit variables

6.1.4 Filtration à pression et débit variables

C'est le cas des filtres alimentés par une pompe centrifuge dont on suppose connue la courbe caractéristique pression-débit. On connaît également la courbe donnant la perte de charge $P_1 - P_0$ du support et des canalisations du filtre en fonction du débit. Ces deux courbes se coupent au point A qui donne le débit initial de filtrat (figure **12 *a***).

À tout instant de la filtration, la différence des ordonnées mesure la chute de pression $P_2 - P_1$ à travers le gâteau seul :

$$P_2 - P_1 = \frac{\eta}{\Omega}\left(\frac{\alpha W V}{\Omega}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

soit encore

$$V = \frac{\Omega^2}{\eta \alpha W}\cdot\frac{P_2 - P_1}{\mathrm{d}V/\mathrm{d}t}$$

Connaissant $\dfrac{\Omega^2}{\eta\alpha W}$, le volume de filtrat V est donc obtenu graphiquement lorsque le point figuratif décrit la courbe caractéristique $P_2 = f$ (débit) de A à B.

Le temps nécessaire à l'obtention de ce volume est obtenu graphiquement (figure **12 *b***) par :

$$t = \int_0^V \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V/\mathrm{d}t}$$

Nota : cette représentation de t/V en fonction de V est souvent utilisée pour déterminer expérimentalement les résistances spécifiques du support et du gâteau.

6.1.5 Filtration continue sous vide

Soit $\psi = \theta/2\pi$ la fraction de la surface totale Ω du tambour à travers laquelle a lieu la filtration à un instant donné et N la vitesse de rotation du tambour (figure **13**).

Le débit volumique de filtrat q_v est obtenu par l'équation :

$$\psi = \frac{R_s \eta}{\Omega \Delta P}\,q_v + \frac{\alpha W \eta}{2N\Omega^2 \Delta P}\,q_v^2$$

Le débit volumique de suspension q_v' est obtenu par l'équation :

$$\psi = \frac{R_s \eta s \rho_0}{\Omega \Delta P W}\,q_v' + \frac{\alpha s^2 \rho_0^2}{2N\Omega^2 W \Delta P}\,q_v'^2$$

avec s titre massique de la suspension,

ρ_0 masse volumique de la suspension :

$$\rho_0 = \frac{\rho_f\,\rho_g}{\rho_f \cdot s + \rho_g(1-s)}\,.$$